

Zur analytischen Behandlung ebener, starker, instationärer Stoßwellen

VON WOLF HÄFELE

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. **10 a**, 1006–1016 [1955]; eingegangen am 23. September 1955)

Nach den Arbeiten von Guderley und Taylor haben sich v. Weizsäcker und Hain und v. Hoerner mit dem Problem auseinandergesetzt, einen Prototyp einer ebenen, starken, instationären, d. h. sich selbst überlassenen Stoßwelle zu finden. Es stellte sich auf zunächst rein numerischem Wege heraus, daß Stoßwellen mit den verschiedensten Anfangsverteilungen mit wachsender Zeit mehr und mehr einer Homologie-Lösung ähnlich werden. In dieser Arbeit wird die Klasse der ebenen Homologie-Lösungen nach der Guderleyschen Methode untersucht, eine einzige als für uns brauchbare gefunden und diese für ein Verhältnis der spezifischen Wärmen von 1,1; 1,4; 1,66 und 2,8 angegeben. Für ein Verhältnis der spezifischen Wärmen von 1,4 gelingt eine einfache, explizite analytische Darstellung der Lösung. Sie zeichnet sich durch streng lineare Geschwindigkeitsverteilung aus, während für die übrigen Werte sich eine fast lineare Geschwindigkeitsverteilung einstellt. In einer folgenden Arbeit wird untersucht, inwieweit noch nicht homologe Stoßwellentypen mit wachsender Zeit sich der in dieser Arbeit beschriebenen Lösung annähern müssen.

Diese Arbeit ist eine Fortführung und Ausführung der Gedankengänge, die für die Arbeiten von v. Weizsäcker¹ und Hain und v. Hoerner² bestimmend waren. Die genannten Arbeiten bilden also den Ausgangspunkt der Überlegungen, die hier angestellt werden. Die allgemeine Problemstellung ist in der Arbeit von v. Weizsäcker ausführlich behandelt und soll deshalb hier nur noch kurz gekennzeichnet werden.

Die Bewegungsverhältnisse interstellarer Gaswolken legen es nahe, sie mit Stoßfronten zu beschreiben. Um später einmal zu einer statistischen Beschreibung einer Vielzahl von Stoßwellen zu kommen, ist es wichtig, zu einem Standardtyp einer einzelnen Stoßwelle zu gelangen. Die Arbeit von Hain und v. Hoerner löste das Problem der zeitlichen Entwicklung einer Stoßfront mit in gewissen Grenzen beliebiger Anfangsverteilung mittels rein numerischer Integration der hydrodynamischen Grundgleichungen. Stoßwellen mit den verschiedensten Anfangsverteilungen gingen dabei in einen Standardtyp über, der der Klasse von Lösungen anzugehören schien, die v. Weizsäcker in seiner Arbeit¹ untersucht hat. Die dort betrachtete Klasse von Lösungen, die Homologie-Lösungen genannt werden, sind Separationslösungen der hydrodynamischen Grundgleichungen und als solche schon von Guderley³ und Taylor⁴ behandelt worden. In

dem bekannten Buch von Courant und Friedrichs⁵ werden sie als *progressing waves* aufgeführt. Guderley entwickelt in seiner Arbeit³ ein sehr tragfähiges analytisches Verfahren, diese Lösungsklasse zu untersuchen, beschränkt sich aber auf zylinder- und kugelsymmetrische Probleme. Ziel dieser Arbeit ist es nun, mit dem Guderleyschen Verfahren die Klasse der ebenen Homologie-Lösungen genau zu untersuchen und festzustellen, inwieweit es unter ihnen eine Lösung gibt, die eine ebene, starke Stoßwelle zu beschreiben imstande ist, die frei von Energie und Impulsnachschub ist, die sich also selbst überlassen ist und deshalb zeitlich abklingt.

Es stellt sich heraus, daß es diese Lösung gibt – im Gegensatz zu der früheren Meinung des Verfassers, die v. Weizsäcker in seiner Arbeit zitiert. Hain und v. Hoerner haben in ihrer Arbeit diese Lösung zum Vergleich mit der sich einstellenden Lösung herangezogen und gefunden, daß beide übereinstimmen.

In der folgenden Arbeit⁶ wird die Stabilität dieser Standard-Lösung studiert, d. h. es wird auf analytischem Wege untersucht, inwieweit diese Standard-Lösung, die ja eine Homologie-Lösung ist, von noch nicht homologen Lösungen mit der Zeit angenähert werden muß.

¹ C. F. v. Weizsäcker, Z. Naturforsch. **9 a**, 269 [1954].

² K. Hain u. S. v. Hoerner, Z. Naturforsch. **9 a**, 993 [1954].

³ G. Guderley, Luftfahrt-Forsch. **19**, 302 [1942].

⁴ G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc., Lond. **201**, 159 [1950].

⁵ Courant and Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publishers, New York 1948.

⁶ W. Häfele, Z. Naturforsch. **10 a**, 1017 [1955], nachstehend.



Die hydrodynamischen Grundgleichungen lauten im eindimensionalen, instationären, ebenen Fall:

(ϱ Dichte, u Geschwindigkeit, p Druck, a Schallgeschwindigkeit, x Ortskoordinate.)

($\alpha = 0$: ebener Fall, $\alpha = 1$: zylindrischer Fall, $\alpha = 2$: kugeliger Fall.)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \varrho \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\varrho u}{x} = 0$$

(Erhaltung der Masse), (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

(Erhaltung des Impulses), (2)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) - a^2 \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u \frac{\partial \varrho}{\partial x} \right) = 0$$

(Erhaltung der Energie, d. h. Entropiekonstanz des einzelnen Massenteilchens), (3)

$$a^2 = \kappa p / \varrho \quad (\text{für ideale Gase}). \quad (4)$$

Es ist nützlich, die Relation für die Entropie S

$$S = c_v \ln p \varrho^{-\kappa} \quad (5)$$

im Auge zu behalten. Man führt gelegentlich die dimensionslos gemachte Entropie s ein

$$s = S / c_v. \quad (6)$$

An der Stoßfront, die als Unstetigkeitsfläche idealisiert wird, gelten folgende Beziehungen (s. Anm. ¹), falls nur die Frontgeschwindigkeit v genügend groß ist und das Gas vor der Front ruht:

$$\varrho = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \varrho_0 \quad (7)$$

(ϱ_0 Dichte des Gases vor der Front),

$$p = \frac{\kappa-1}{2} \varrho u^2, \quad (8)$$

$$u = \frac{2}{\kappa+1} v. \quad (9)$$

Macht man nun folgenden Ansatz

$$u = g(t) \cdot \varphi(\xi), \quad \varrho = f(t) \cdot \varrho^*(\xi), \quad (10)$$

$$p = l(t) \cdot \psi(\xi), \quad \text{wo} \quad \xi = \xi(x, t),$$

so erzwingt die Form der Gln. (1) bis (3) folgenden Typ für den Ansatz (10)

$$u = t^{-k} \varphi(\xi), \quad \varrho = t^d \varrho^*(\xi), \quad p = t^{d-2k} \psi(\xi),$$

$$\xi = \frac{x-x_0}{(t-t_0)^{1-k}} \quad (\alpha=0), \quad \xi = \frac{x}{(t-t_0)^{1-k}} \quad (\alpha \neq 0). \quad (11)$$

Die Größen k und d haben den Charakter von Separationsparametern, φ , ϱ^* und ψ sind durch ein

System gewöhnlicher Differentialgleichungen miteinander verbunden, das in der Arbeit von v. Weizsäcker auch angegeben ist. Für $k \rightarrow \infty$ kommt man zu dem Grenzfall

$$u = e^{-k' t} \cdot \varphi(\xi), \quad \varrho = e^{d' t} \cdot \varrho^*(\xi),$$

$$p = e^{d' t - 2 k' t} \cdot \psi(\xi), \quad (12)$$

$$\xi = (x - x_0) e^{k' (t - t_0)} \quad (\alpha = 0),$$

$$\xi = x e^{k' (t - t_0)} \quad (\alpha \neq 0).$$

Dabei bedeuten k' und d' wieder Konstanten.

Obwohl wir nur den ebenen Fall, also $\alpha = 0$, untersuchen wollen, nehmen wir zunächst die Fälle $\alpha \neq 0$ mit, um uns einerseits später gegen diese absetzen zu können und andererseits so lange als möglich den Anschluß an die Guderleysche Arbeit behalten zu können.

Im ebenen Fall $\alpha = 0$ gibt es noch den singulären Ansatz:

$$u = 1/t \cdot \varphi(\xi), \quad \varrho = t^d \varrho^*(\xi), \quad (13)$$

$$p = t^{d-2} \psi(\xi), \quad \xi = (x - x_0) - \beta \ln(t - t_0).$$

Dabei ist β wieder eine Konstante.

Die Fälle (12) und (13) sind nur der Vollständigkeit halber aufgeführt, lediglich der Ansatz (11) ist bedeutsam. Geht man mit (11) in die Stoßgleichungen ein, so sieht man, daß der Ansatz (11) und die Bedingungen (7) bis (9) nur zu erfüllen sind, wenn man setzt:

$$d = 0, \quad \xi = \xi_F; \quad (14)$$

($\xi_F = \text{const}$ als Lebenslinie der Front).

Die Frontgeschwindigkeit v wird dann also gleich der Geschwindigkeit längs einer Linie $\xi = \text{const}$.

Um die Guderleysche Behandlungsweise auf unser Problem anwenden zu können, ziehen wir aus den Größen φ und ψ ein ξ bzw. ξ^2 heraus. Weiter sollen die ganze Arbeit über neben dem Parameter k die Parameter n und n' verwendet werden. Es gilt:

$$n = 1 - k, \quad n' = 1 - n^{-1}. \quad (15)$$

Wir substituieren:

$$\varphi(\xi) = n \xi \nu(\xi), \quad \psi(\xi) = n^2 \xi^2 \pi(\xi),$$

$$\kappa \pi / \varrho = \mu^2. \quad (17)$$

Der Ansatz (11) geht mit (17) unter Berücksichtigung von (14) über in

$$u = n t^{n-1} \xi \nu(\xi) = n(x/t) \nu(\xi), \quad (18)$$

$$\varrho = \varrho(\xi), \quad (19)$$

$$a = n t^{n-1} \xi \mu(\xi), \quad p = n^2 t^{2n-2} \xi^2 \pi(\xi), \quad (20)$$

$$\xi = x/t^n. \quad (21)$$

Dabei haben wir für q^* wieder q geschrieben, weil wir wegen $d=0$ zwischen beiden nicht mehr zu unterscheiden brauchen. In (21) schreiben wir kurz x bzw. t statt $(x-x_0)$ bzw. $(t-t_0)$ im ebenen Fall und x bzw. $(t-t_0)$ im nicht-ebenen Fall. Da wir in dieser Arbeit die Größen x_0, t_0 nicht besonders zu beachten haben, reden wir nun abkürzend von x und t . Die Frontbedingungen (7) bis (9) lauten mit dem Ansatz (18) bis (21)

$$v_F = 2/(\kappa + 1), \quad (22)$$

$$\mu_F = \sqrt{2\kappa(\kappa-1)}/(\kappa+1), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & d\nu : d\mu : d\ln q : d\ln \xi \\ &= \left[-2(\nu-1) \left\{ \mu^2(\kappa\nu(1+\alpha) + 2n') - \kappa\nu(\nu-1) \left(\nu - \frac{1}{n} \right) \right\} \right] \\ &: \left[-\mu \left\{ 2\mu^2(\kappa(\nu-1) + n') + \kappa(\nu-1) \left[-(2 + (\kappa-1)\alpha)\nu^2 + \left(\frac{3-\kappa}{n} + \kappa + 1 + (\kappa-1)\alpha \right) \nu - \frac{2}{n} \right] \right\} \right] \\ &: [4\mu^2 n' + 2\kappa(\nu-1)\nu(\alpha(\nu-1) - n')] \\ &: [2\kappa(\nu-1) \{ \mu^2 - (\nu-1)^2 \}]. \end{aligned} \quad (26)$$

Das Entscheidende an der Proportion (26) ist, daß sie sich in eine Diff.-Gl. und zwei folgende Quadraturen aufspalten läßt. Die erste Proportion stellt eine gewöhnliche Diff.-Gl. 1. Ordnung für den Zusammenhang $\mu = \mu(\nu)$ dar. Ist dieser gefunden, so ergeben die beiden letzten Proportionen den Zusammenhang $\xi = \xi(\nu)$ und $q = q(\nu)$, was nach Um-

kehrung bedeutet, daß man die Integration geleistet hat, weil ν, μ und q als Funktion von ξ vorliegen. Den Zusammenhang $\mu = \mu(\nu)$ kann man als den Hodographen des Strömungsproblems betrachten. Unser Problem reduziert sich also auf die Diskussion der Diff.-Gl.

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{\mu}{2(\nu-1)} \cdot \frac{2\mu^2(\kappa(\nu-1) + n') + \kappa(\nu-1) \left[-(2 + (\kappa-1)\alpha)\nu^2 + \left(\frac{3-\kappa}{n} + \kappa + 1 + (\kappa-1)\alpha \right) \nu - \frac{2}{n} \right]}{\mu^2(\kappa\nu(1+\alpha) + 2n') - \kappa\nu(\nu-1) \left(\nu - \frac{1}{n} \right)}. \quad (27)$$

Die Reduktion auf die gewöhnliche Diff.-Gl. 1. Ordnung ist das Kernstück der Guderleyschen Methode und in der Diskussion der Gl. (27) besteht unsere eigentliche Aufgabe. Eine geschlossene Integration ist nur in Spezialfällen möglich, während wir doch alle Lösungen von (27) durchmustern müssen, die die Strömung hinter einer Stoßfront darstellen. Die Frontbildung in der Schreibweise des Homologie-Ansatzes (22) und (23) stellt einen Punkt im Diagramm dar, den wir den Punkt A nennen wollen.

Wir lösen unsere Aufgabe so, daß wir die Richtungsfelder von (27) angeben und in diesem Richtungsfeld nach möglichen Lösungen unseres Pro-

blems fragen. Für den Fall $\alpha \neq 0$ liegen die Felder in der Guderleyschen Arbeit vor. Es unterscheiden sich der zylindrische und kugelige Fall im qualitativen Bild des Richtungsfeldes gar nicht. Dagegen stellt es sich heraus, daß beide sehr weitgehend von dem qualitativen Bild des Richtungsfeldes im ebenen Fall abweichen. Nur mit Kunstgriffen kann man den stetigen Übergang zum Fall $\alpha=0$ herstellen. Praktisch handelt es sich um einen neuen Typ von Richtungsfeld.

Will man also das Richtungsfeld von (27) für den Fall $\alpha=0$ ermitteln, so muß man sich einen Überblick über die Singularitäten von (27) verschaffen. Wir behalten die Be-

$$q_F = 1 \quad (24)$$

(als Normung bei geeigneter Wahl von q_0),

$$\xi = \xi_F \quad (\xi_F = \text{const} \neq 0). \quad (25)$$

Die Indizierung F soll andeuten, daß die Werte an der Front gelten.

Im folgenden wollen wir von dem Ansatz (18) bis (21) kurz als dem Homologie-Ansatz reden. Der Homologie-Ansatz befriedigt die Grund-Gln. (1) bis (3) hinsichtlich der Zeitabhängigkeit identisch, für die von ξ abhängigen Größen bleibt ein System von drei gewöhnlichen Diff.-Gln. übrig, was am besten in Form einer Proportion angegeben wird:

zeichnungsweise Guderleys bei und stellen zunächst sechs bzw. acht singuläre Punkte fest. Neben ihrer Lage ist ihr Typ für den Charakter des Feldes bestimmend. In (27) gehen n und κ als Parameter ein und mit diesen beiden Parametern ändern sich die singulären Punkte hinsichtlich ihres Typs und im allgemeinen auch ihrer Lage. Wir beschränken uns zunächst überall dort, wo es nicht zu umgehen ist, auf den Fall einatomiger Gase, also auf $\kappa=5/3$. Für diesen Wert werden wir eine Lösung finden, die sich dann auch leicht für andere κ -Werte angeben läßt. Mit der n -Abhängigkeit ist das anders. Für bestimmte diskrete Werte ändert sich der Charakter und die Lage im allgemeinen eines der singulären Punkte und mit ihm das gesamte Feld, so daß für die gesamte n -Skala eine Vielzahl von Richtungsfeldern anzugeben ist. In der Dissertation des Verfassers sind alle diese Richtungsfelder tatsächlich angegeben und nach brauchbaren Lösungen durchmustert. Die einzige vorhandene Lösung dagegen findet sich in einem bestimmten Intervall von n -Werten gehört. Da das Typische am Auffinden dieser Lösung voll und ganz bei der Diskussion dieses einen Richtungsfeldes sichtbar wird, wollen wir uns auf dieses eine Intervall beschränken, zumal man auch schon von da her in etwa erkennen kann, daß die übrigen Intervalle nicht in Frage kommen.

Das in Frage kommende Intervall der n -Werte ist durch die Ungleichung

$$\frac{2}{(\kappa+2)} < n < \frac{2}{(\kappa+1)} \quad (28)$$

gekennzeichnet. Bevor wir nun dazu kommen, die sechs bzw. acht singulären Punkte zu betrachten, müssen wir darauf hinweisen, daß das Richtungsfeld wie bei Guderley auch in projektiven Koordinaten angegeben wird, um die Verhältnisse im Unendlichen gut wiedergeben zu können. Es gilt

$$\nu = x_2/x_3, \mu = x_1/x_3, \quad (29)$$

$$\text{mit } M = \left[-2(x_2 - x_3) \left\{ x_1^2 (\kappa x_2 (1 + \alpha) + 2 n' x_3) - \kappa x_2 (x_2 - x_3) \left(x_2 - \frac{1}{n} x_3 \right) \right\} \right], \quad (32)$$

$$N = \left[-x_1 \left\{ 2 x_1^2 (\kappa (x_2 - x_3) + n' x_3) + \kappa (x_2 - x_3) \left(- (2 + (\kappa - 1) \alpha) x_2^2 + \left(\frac{3 - \kappa}{n} + \kappa + 1 + (\kappa - 1) \alpha \right) x_2 x_3 - \frac{2}{n} x_3^2 \right) \right\} \right]. \quad (33)$$

Wie schon bei Guderley ersichtlich, ist $x_3=0$ für $\alpha \neq 0$ eine Lösung der Diff.-Gl. (31), kann also außer in singulären Punkten (P_6 und P_7) nicht von anderen Lösungen geschnitten werden und stellt somit für solche anderen Lösungen eine Schranke dar. Für $\alpha=0$ dagegen nimmt (31) die Form

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_3}{x_3} f(x_2, x_1, x_3) \quad (34)$$

an. $x_3=0$ ist jetzt insofern immer noch eine Lösung, als $x_3=0$ tatsächlich (34) befriedigt. Indessen hat jetzt die Gerade $x_3=0$ als ganze Gerade die Eigenschaft, die sonst nur einzeln isolierte singuläre Punkte haben, nämlich Zähler und Nenner von (34) gleichzeitig zu Null zu machen. Das heißt, daß die Gerade $x_3=0$ in jedem ihrer Punkte von anderen Lösungskurven überschritten werden kann; $x_3=0$ stellt keine Schranke dar. Der Sinn dieses merkwürdigen Verhaltens wird deutlich, wenn wir den Verlauf der Größe ξ , die für $t=\text{const}$ ja die Ortskoordinate darstellt, auf einer Lösungskurve $x_2=x_2(x_1)$ in der Umgebung $x_3=0$ einmal studieren. Nach Ein-

$$x_3 = \bar{\alpha} - x_1/3 + x_2/3; \quad (30)$$

$x_3=0$ ist also die unendlich ferne Gerade; $\bar{\alpha}$ ist eine Konstante, hat den Charakter eines Maßstabes und ist mit dem oben eingeführten α nicht zu verwechseln.

Es gilt also für die singulären Punkte hinsichtlich ihrer Lage allgemein, hinsichtlich ihres Typs nur für das Intervall (28) folgendes:

	ν -Wert	μ -Wert	Typ
P_1	1	0	Knotenpunkt
$P_{2,3}$	$\frac{2}{2-\kappa}$	$\pm \frac{\kappa}{2-\kappa}$	Sattelpunkt
P_4	0	0	Knotenpunkt eines Geradenbüschels
P_5	$\frac{2}{n(\kappa+1)}$	$\frac{\kappa \nu (\nu-1) \left(\nu - \frac{1}{n} \right)}{2-\nu}$	befindet sich im Komplexen
P_8	$1/n$	0	Knotenpunkt
	x_2 -Wert	x_1 -Wert	Typ
P_6	0	$3 \bar{\alpha}$	Knotenpunkt (existiert als isolierter singulärer Punkt nur für $\alpha \neq 0$).
P_7	$3 \bar{\alpha}$	0	

Der Punkt $P_{2,3}$ ist nur im ebenen Fall ein einziger Punkt, für $\alpha \neq 0$ tritt er als das Punktepaar P_2 und P_3 auseinander. Der wesentliche Unterschied gegenüber dem Fall $\alpha \neq 0$ tritt aber bei der Betrachtung der Geraden $x_3=0$ hervor. Dazu ist es gut, die Diff.-Gl. (27) in projektiven Koordinaten anzugeben

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{1}{3} x_1 M - \frac{1}{3} x_2 N + x_3 M}{\frac{1}{3} x_1 M - \frac{1}{3} x_2 N + x_3 N} \quad (31)$$

führung der projektiven Koordinaten (29) ergibt sich aus (26)

$$d \ln \xi / dx_3 = 1/x_3 \quad \text{unabhängig von } \kappa, n, \alpha. \quad (35)$$

Das heißt aber

$$\xi = C x_3, \quad (35a)$$

wobei C eine Konstante sein soll. Würde für den Fall $\alpha \neq 0$ eine Lösungskurve $x_2=x_2(x_1)$ die Gerade $x_3=0$ überschreiten, so würde ξ mit x_3 sein Vorzeichen umkehren. Das kann aber nicht sein, denn für $\alpha \neq 0$ und $t=\text{const}$ hat ξ den Charakter eines Radius, darf also niemals sein Vorzeichen wechseln können. $x_3=0$ muß deshalb für Lösungskurven $x_2=x_2(x_1)$ eine Schranke sein, also selbst Lösung sein, was oben ja auch festgestellt wurde. Für $\alpha=0$ dagegen hat ξ bei $t=\text{const}$ den Charakter einer gewöhnlichen Ortskoordinate, die nicht nur ihr Vorzeichen umkehren kann, sondern für jeden vernünftigen Lösungstyp sogar ihr Vorzeichen ändern muß, denn warum sollte der in Rede stehende Lösungstyp nicht negative Werte fähig sein? Für $\alpha=0$ und nur dort muß also die Gerade $x_3=0$ ihren Typus als Schranke, d. h. als gewöhnliche

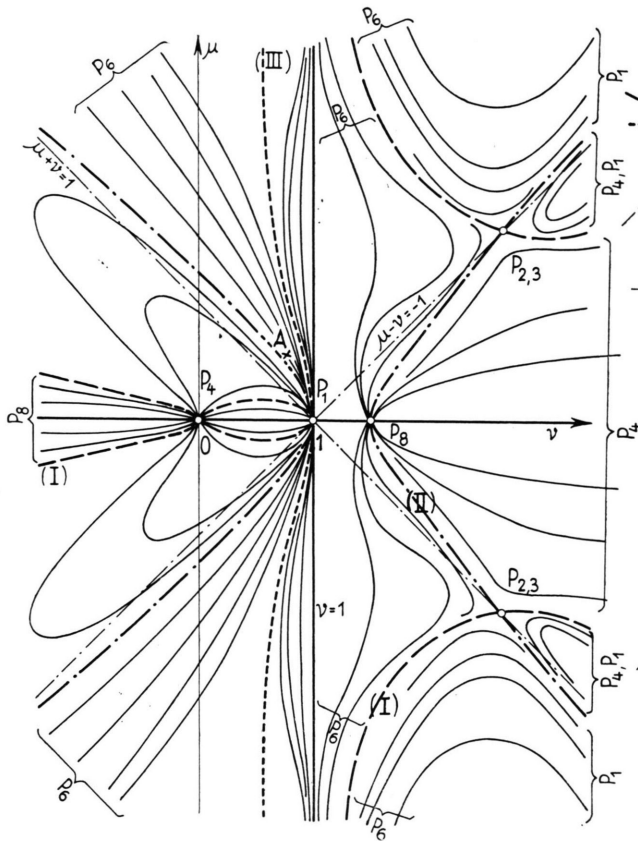


Abb. 1. Richtungsfeld der Guderleyschen Diff.-Gl. im ebenen Fall: es sind rechtwinklige (μ, ν) -Koordinaten verwendet.

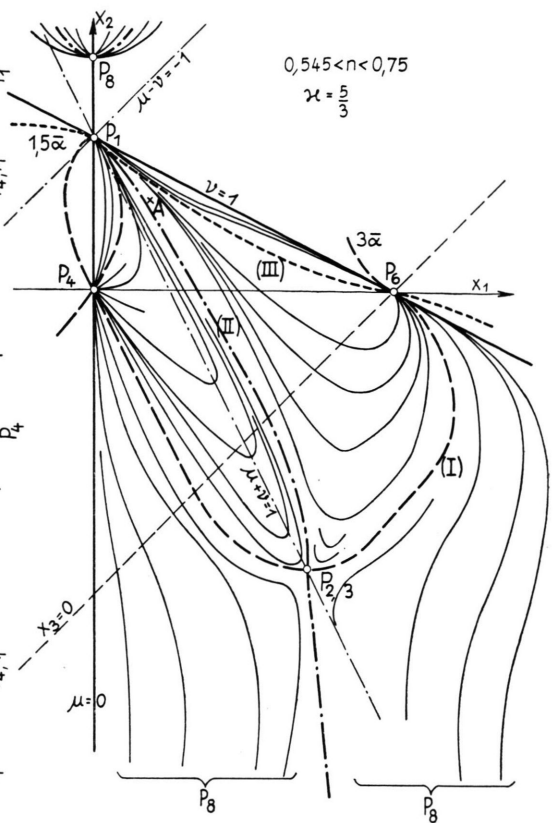


Abb. 2. Dasselbe Feld in projektiver Darstellung. Das Unendliche der (μ, ν) -Ebene ist hier die Gerade $x_3 = 0$.

Lösung, verlieren und überschreitbar werden, was dadurch geleistet wird, daß jeder ihrer Punkte singulär wird. Nun wird auch ganz deutlich, warum das Richtungsfeld für $\alpha = 0$ so sehr von dem des Falles $\alpha \neq 0$ abweicht.

Ermittelt man nun noch die einzelnen Eigenschaften der Umgebung der Punkte P_1 bis P_8 , wie z. B. Einlaufrichtung usw., arbeitet die verschiedenen Eigenschaften ineinander auf, so ergibt sich das in folgendem beschriebene Richtungsfeld.

Die erste Verwirrung beim Anblick der Richtungsfelder legt sich, wenn man sich ihre Grundeigenschaften klar macht. Abb. 1 gibt das Richtungsfeld in der gewöhnlichen (μ, ν) -Ebene wieder, Abb. 2 dasselbe Feld in projektiven Koordinaten, so daß ein unmittelbarer Vergleich zu dem von Guderley angegebenen Feld geübt werden kann.

In der (μ, ν) -Darstellung ist das Feld symmetrisch zur ν -Achse, was dem Umstand entspricht, daß das Vorzeichen der Schallgeschwindigkeit (d. h. hier das Vorzeichen von μ) beliebig wählbar ist. Wie aus (27) unmittelbar ersichtlich, sind die Geraden $\nu = 1$ und $\mu = 0$ Lösungen. Sie teilen die (μ, ν) -Ebene in vier Quadranten ein. Wäre $x_3 = 0$ (das Unendliche)

auch eine Lösung, so könnten Lösungskurven $\mu(\nu)$ ihren Quadranten nie verlassen. Das ist für $\alpha \neq 0$ der Fall; so ist es für Guderley allein wichtig, das Feld des Quadranten $\nu < 1$, $\mu > 0$ zu studieren. Für $\alpha = 0$ können Lösungskurven $\mu(\nu)$ ihren Quadranten verlassen und in andere eintreten, was Abb. 2 deutlich zeigt. Für $\alpha = 0$ ist also das ganze Feld zu betrachten. Für die Lösungen $\nu = 1$ und $\mu = 0$ wird die Determinante der Hodographentransformation $\partial(u, a)/\partial(x, t)$ bzw. ihre Inverse zu Null; $\mu = 0$ und $\nu = 1$ sind nur in der (μ, ν) -Ebene Lösungen, ihnen entsprechen im allgemeinen keine physikalisch möglichen Lösungen. Nur an den auf ihnen liegenden singulären Punkten sind die durch sie dargestellten Zustände physikalisch möglich. Und eben das ist die Bedeutung dieser singulären Punkte. Das eigentliche Feld wird durch drei Separatrices (I) – (III) bestimmt. Die Separatrix (I) kann man sich von P_1 ausgehend denken, P_4 wird von (I) durchsetzt, ebenso $P_{2,3}$, und in P_6 trifft sich (I) mit ihrem anderen Ast. Die Separatrix (II) beginnt

auch in P_1 und läuft über den Sattel $P_{2,3}$ nach P_8 , während (III) von P_1 nach P_6 geht. So entstehen „Säcke“, innerhalb derer die nicht ausgezeichneten Lösungskurven verbleiben müssen. Lediglich dann, wenn ein „Zipfel“ solch eines Sackes ein Knotenpunkt ist, kann eine Lösungskurve ihren Sack verlassen. So gibt es den Sack $P_1, P_{2,3}, P_4$ oder $P_1, P_{2,3}, P_6$ usw.

Wichtig für die gesamte Proportion (26) ist eine Doppelgerade

$$\mu^2 - (\nu - 1)^2 = 0, \text{ d. h. } \mu + \nu = 1, \quad -\mu + \nu = 1. \quad (36)$$

Auf ihr wird nach (36) $d \ln \xi = 0$, d. h. im allgemeinen erreicht ξ dort ein Extremum, die Ortskoordinate kann nicht größer (oder kleiner) als ein bestimmter Wert werden. Wir haben es hier mit dem bekannten Phänomen der Umkehrkanten zu tun, die Guderley sehr ausführlich bespricht und das den Ausgangspunkt für die angekündigte Stabilitätsüberlegung des Verfassers⁶ darstellt. Müssen Lösungskurven, die eine physikalisch sinnvolle Lösung darstellen sollen, diese Gerade überschreiten, so dürfen sie das höchstens im Punkte $P_{2,3}$ tun. Dort bekommt der interessierende Quotient die Form

$$d \ln \xi / d\nu = 0/0.$$

Wie eine ausführliche Diskussion zeigt, ist dieser Quotient auf den Kurven (I) und (II), die allein $P_{2,3}$ durchsetzen, eines stetigen, monotonen Ganges der ξ -Werte fähig. Soweit die Betrachtung zum allgemeinen Richtungsfeld.

Nach (22) und (23) ist für einen festen κ -Wert der die Frontbedingung darstellende Punkt A im (μ, ν) -Diagramm ein festliegender Punkt. Ändert man nun n , so wandert das Feld über A hinweg, und die von A ausgehenden Kurven gehören einmal zum Sack $P_1, P_{2,3}, P_6$, einmal wird es genau die Kurve (II) sein, die durch A geht, und dann werden die Kurven aus A zum Sack $P_1, P_{2,3}, P_4$ gehören. Uns interessiert die Strömung hinter einer Stoßfront, deren Lebenslinie ja die Kurve $\xi = \xi_F$ war. Wichtig sind also die Verhältnisse für $\xi < \xi_F$. Das bedeutet im (μ, ν) -Diagramm, daß wir von A ausgehend immer in der Richtung zu laufen haben, die von P_1 fortführt. Wir kommen also je nach Wahl des Parameters n entweder nach P_4 , für einen einzigen n -Wert nach P_8 und sonst nach P_6 . Auf dem Wege nach P_4 müssen wir die verbotene Gerade $\mu + \nu = 1$ überschreiten, so daß alle diese Lösungen nicht in Frage kommen. Lösungen, die nach P_6 einlaufen, gehen im allgemeinen wie die Gerade $\nu = 1$

in den Punkt P_6 . Allein die Separatrix (III) geht mit $\nu \neq 1$ nach P_6 ein. Für $\alpha = 2$ und $n = 2/5$ bzw. $\alpha = 1$ und $n = 1/2$ und – wenn man so will – $\alpha = 0$ und $n = 2/3$ stellt die Lösung (III) die berühmte Taylorsche Lösung dar. In diesem Fall kann man (27) geschlossen integrieren und kommt für $\alpha = 2$ auf dieselbe geschlossene, analytische Darstellung, die Taylor⁷ auf anderen Wegen jüngst angegeben hat. Jedenfalls gilt beim Einlauf nach P_6 :

$$\begin{aligned} d \ln \xi / dx_3 = 0 & \rightarrow \xi = \text{const} & \text{für Einlauf} \\ d \ln \varrho / dx_3 = 2/x_3 & \rightarrow \varrho \sim x_3^2 & \text{mit } \nu = 1, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \xi}{dx_3} = \frac{1}{x_3} \frac{2n' + \kappa}{n' + \kappa} & \rightarrow \xi \sim x_3^{\frac{2n' + \kappa}{n' + \kappa}} & \text{für Einlauf} \\ \frac{d \ln \varrho}{dx_3} = \frac{1}{x_3} \frac{(-2n')}{n' + \kappa} & \rightarrow \varrho \sim x_3^{-\frac{2n'}{n' + \kappa}} & \text{auf (III)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Weiter gilt für beide Einläufe:

$$p \sim \xi^2 \pi(\xi) = \xi^2 \frac{\mu^2 \varrho}{\kappa} = \text{const}. \quad (39)$$

Im ersten Fall geht für einen festen ξ -Wert ϱ gegen Null, der Druck gegen einen konstanten Wert (hinsichtlich der ξ -Abhängigkeit), also die Temperatur gegen Unendlich. Überqueren wir vorher die Gerade $x_3 = 0$, so gilt obige Aussage für Werte $\xi < 0$; kommen wir direkt auf P_6 zu, so gilt sie für Werte $\xi > 0$. $\xi = 0$ erreicht man auf der Separatrix (III). Auch auf ihr geht die Dichte gegen Null, der Druck wird konstant und deshalb geht die Temperatur gegen Unendlich. Dieses Verhalten können wir aber als Abschluß unserer sich selbst überlassenen Stoßfront nicht gebrauchen, denn gerade das Ansteigen der Temperatur bei konstantem Druck muß man als Energienachschub an einer festen, im Endlichen gelegenen Stelle ξ interpretieren. Für eine kugelförmige Explosionswelle ist sie dagegen die richtige Lösung, weil das Explosionszentrum der Singularität P_6 entspricht. Es ergibt sich, daß nur noch die Separatrix (II), die über $P_{2,3}$ hinweg führt und nach P_8 läuft, in Frage kommt. Beim Einlauf nach P_8 gilt auf der in Frage kommenden Richtung (die zweite mögliche Richtung ist allein von $\mu = 0$ besetzt, das für uns nicht in Frage kommt):

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \xi}{d\mu} = -\frac{1}{\mu} 2 \frac{1-n}{\kappa-1} & \rightarrow |\xi| \sim \mu^{-2 \frac{1-n}{\kappa-1}}, \\ \frac{d \ln \varrho}{d\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{2}{\kappa-1} & \rightarrow \varrho \sim \mu^{\frac{2}{\kappa-1}}. \end{aligned} \quad (40)$$

⁷ I. Lockwood Taylor, Phil. Mag. 46, 317 [1955].

ξ geht also gegen ∞ , genau gesagt gegen $-\infty$, denn vorher war $x_3=0$ überquert worden. Die Dichte ϱ geht gegen Null, und, wie sich herausstellt, ebenso der Druck. Führt man die richtigen Abhängigkeiten wieder ein, so gilt beim Einlauf nach P_8 genauer

$$\begin{aligned}\xi &\rightarrow -\infty \\ u &= \frac{x}{t} \left\{ 1 + \frac{1}{A} \left| \xi \right|^{-\frac{\kappa-1}{1-n}} + \frac{1}{A C_0} \left| \xi \right|^{-\frac{3}{2} \frac{\kappa-1}{1-n}} + \dots \right\}, \\ \varrho &= \varrho_0 \left| \xi \right|^{\frac{-1}{1-n}}, \quad A = \frac{\kappa(\kappa-2) n'/n}{\kappa/n+2 n'}, \\ p &= p_0 t^{-2k} \left| \xi \right|^{\frac{2-2n-\kappa}{1-n}}, \quad T = T_0 t^{-2k} \left| \xi \right|^{\frac{3-2n-\kappa}{1-n}}.\end{aligned}\quad (41)$$

Verlangen wir neben der Ungleichung (28) die für alle κ -Werte geltende Ungleichung

$$\frac{1}{2} < n < \frac{2}{3}, \quad (42)$$

so können wir folgendes behaupten:

Die Geschwindigkeit u geht dort für $t=\text{const}$ nach $-\infty$ und hat dabei die Form x/t . Das bedeutet, daß dort keine Beschleunigungen mehr auftreten, wir haben es also mit reiner Trägheitsbewegung zu tun, es liegt bloßes Abströmen vor. ϱ und p gehen nach Null, T dagegen wächst auch hier für nicht zu große Werte von κ über alle Schranken. Während beim Einlauf nach P_6 das Unendlichwerden von T nicht geduldet werden durfte, ist es hier nicht schlimm, da ϱ und p nach Null gehen. Der Einlauf nach P_8 ist also als „Abschluß“ unserer sich selbst überlassenen Stoßwelle durchaus sinnvoll. Wir erhalten demnach eine reguläre Lösung des Problems, wenn wir den Parameter n so wählen, daß die Separatrix (II) durch A hindurch geht. Verlangen müssen wir nur, daß der kritische n -Wert, den wir n_0 nennen wollen, sowohl dem Intervall (28) als auch dem Intervall (42) angehört. Es stellt sich heraus, daß das in der Tat der Fall ist. Wie eine genaue Durchmusterung zeigt, ist diese Lösung dann auch die einzige. Entweder entstehen Umkehrkanten oder es treten andersgeartete Singularitäten auf, etwa solche, wie wir sie beim Einlauf in den Punkt P_6 betrachteten.

Die Separatrix (II) ist die einzige Lösung, die in P_1 entspringt und in P_8 endet. Eine Gleichung für μ^2 muß also an den Stellen $\nu=1$ und $\nu=1/n$ Nullstellen haben. Schließt eine solche Gleichung den Punkt $P_{2,3}$ ein, so kann sie nur die Kurve (II) darstellen. Wir machen deshalb den Ansatz

$$\mu^2 = (\nu-1)(\nu-1/n)f(\nu) \quad (43)$$

und erhalten aus der Diff.-Gl. (27) eine recht häßlich aussehende Diff.-Gleichung für $f(\nu)$, der man aber doch ansehen kann, daß

$$f(\nu) = \kappa \quad \text{für} \quad n = 2 - \kappa \quad (45), (44)$$

eine Lösung darstellt.

Der Ausdruck

$$\mu^2 = \kappa(\nu-1)(\nu-1/(2-\kappa)) \quad (46)$$

stellt für $n = (2-\kappa)$ die Separatrix (II) dar, denn (46) führt über den Punkt $P_{2,3}$, wie man sich leicht überzeugt. Verlangen wir nun noch, daß (46) über den Punkt A führt, so ergibt sich, daß das für

$$\kappa = 7/5, \quad \text{also} \quad n = 3/5 \quad (47)$$

der Fall ist. Die jetzt auszuführenden Quadraturen lassen sich auch leicht erledigen und es ergibt sich nach Einführung von ξ als unabhängiger Veränderlicher

$$\begin{aligned}u &= \frac{t^{-0,4}}{C_0} \left(\frac{3}{5} + C_0 \xi \right) = \frac{x}{t} + \frac{1}{C_0} \frac{3}{5} t^{-0,4}, \\ a^2 &= \frac{t^{-0,8}}{C_0^2} \frac{63}{125} \left(1 + \frac{2}{3} C_0 \xi \right), \\ p &= \frac{t^{-0,8}}{C_0^2} \varrho_0 \frac{9}{25} \left(1 + \frac{2}{3} C_0 \xi \right)^{-3/2}, \\ \varrho &= \varrho_0 \left(1 + \frac{2}{3} C_0 \xi \right)^{-5/2};\end{aligned}\quad (48)$$

ϱ_0 und C_0 sind Integrationskonstanten. Die Frontbedingungen geben noch folgenden Zusammenhang zwischen ξ_F und C_0 :

$$\xi_F C_0 = -6/5. \quad (49)$$

Für $\kappa=7/5=1,4$, dem sehr genau der Wert für Luft entspricht, haben wir also eine einfache analytische Lösung sogar explizit angeben können. Dabei ergab sich, daß für $\kappa=1,4$ der zugehörige n_0 -Wert 0,6 heißt. Für andere κ -Werte, jedenfalls für solche, für die $\kappa = (2m+3)/(2m+1)$ ist, wobei m ganzzahlig ist, könnte nach Meinung des Verfassers eine geschlossene Integration der Gl. (27) im gewünschten Sinne vielleicht gelingen.

Indessen waren zuerst die Ergebnisse für $\kappa=5/3$ gesucht und dort auf numerischem Wege mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine G1 gefunden worden. Auch mußte für die in der folgenden Arbeit beschriebene Stabilitätsbedingung ohnehin die Gl. (27) numerisch integriert werden, so daß das Suchen nach analytischer Darstellung für $\kappa \neq 7/5$ nicht allzu intensiv betrieben wurde, zumal sie bestimmt nicht so einfach aussehen würde wie (48).

Bei der numerischen Integration bestand die Aufgabe darin, für ein bestimmtes κ den n -Wert so zu wählen, daß die durch A gehende Integralkurve auf $P_{2,3}$ trifft. Auf numerischem Wege ist diese Aufgabe natürlich nur mit einer bestimmten Genauigkeit zu lösen, da $P_{2,3}$ ein Sattelpunkt ist und nur eine einzige Kurve durch ihn führt. Man muß verschiedene n -Werte ausprobieren und sich an den richtigen herantasten. Dieses ganze Verfahren stellt ein umfangreiches Programm dar und wäre ohne elektronische Rechenmaschine wohl kaum auszuführen gewesen. Es ergibt sich schließlich die folgende kleine Tabelle:

κ	n_0	k_0
1,1	0,56888 \pm 0,00001	0,43112 \pm 0,00001
1,4	0,6	0,4
5/3	0,61073 \pm 0,000005	0,38927 \pm 0,000005
2,8	0,626704 \pm 0,000005	0,373296 \pm 0,000005

(50)

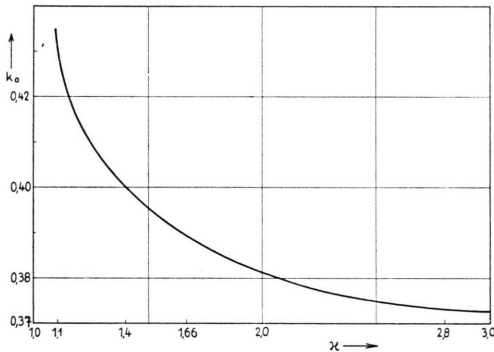


Abb. 3. Abhängigkeit des Parameters k_0 , der die reguläre Homologie-Lösung kennzeichnet, vom Wert der Größe κ .

Dieser Zusammenhang ist in Abb. 3 graphisch wiedergegeben. Mit der Bestimmung des Wertes n_0 ist natürlich die Ermittlung der Zusammenhänge $\pi(\xi)$, $\varrho(\xi)$, $u(\xi)$ möglich, indem nun ebenfalls auf numerischem Wege die Quadraturen für $\ln \xi$ und $\ln \varrho$ über der Integralkurve $n = n_0$ ermittelt werden. Für die in Rede stehenden κ -Werte ergeben sich die Abb. 4 – 7.

Für die physikalisch wichtigen Werte $\kappa = 7/5$ und $\kappa = 5/3$ sind die Verteilungen noch mit stark geprüßten Maßstäben angegeben, um sie so weit darstellen zu können, wie die Verteilung für $\kappa = 5/3$ tatsächlich gerechnet wurde. Dabei sind die Größen $\varrho^{-2/5}$ bzw. $\varrho^{-1/3}$ aufgetragen, um erkennen zu lassen, wie gut diese Potenzgesetze erfüllt sind (Abb. 8 und 9).

Die Strömungsverteilung für $\kappa = 1,4$ liegt in analytischer Form vor, die Verteilung für die übrigen κ -Werte wie gesagt nur in numerischer Form. Für den in Hinblick auf unsere astrophysikalischen Anwendungen wichtigen Wert $\kappa = 5/3$ ist die Verteilung aus der nachfolgenden Tab. 1 zu entnehmen. Dabei ist zu bemerken, daß die Geschwindigkeit u willkürlich auf 1 normiert ist, um übersichtliche Verhältnisse zu gewinnen. Der Homologie-Ansatz verlangt streng genommen für u noch den Faktor $2 n_0 / (\kappa + 1)$.

ξ	ϱ	u	T	p
+1,0000	+1,0000	+1,0000	+0,3333	+0,3333
0,9031	0,5976	0,8142	0,3732	0,2230
0,8144	0,3959	0,6430	0,4076	0,1614
0,6948	0,2436	+0,4109	0,4511	0,1099
0,5566	0,1500	+0,1408	0,4978	0,0747
0,4382	0,1041	–0,0920	0,5349	0,0557
0,3358	0,0782	–0,2947	0,5652	0,0442
0,2462	0,0621	0,4727	0,5904	0,0366
+0,1659	0,0512	0,6327	0,6124	0,0313
+0,0635	0,0406	0,8373	0,6388	0,0259
–0,0495	0,0320	1,064	0,6666	0,0213
–0,1426	0,0267	1,251	0,6884	0,0184
0,2380	0,0224	1,444	0,7097	0,0159
0,4023	0,0169	1,778	0,7448	0,0126
0,5052	0,0143	1,987	0,7656	0,0109
2,034	0,0025	5,154	1,003	0,0025
3,143	0,0011	7,492	1,125	0,0012
4,255	0,0005	9,856	1,225	0,0007
6,428	0,0002	14,51	1,378	0,0003

Tab. 1. Strömungsverteilung für $\kappa = 5/3$.

Die ξ -Werte sind nicht äquidistant, weil sie selbst als Ergebnis einer Quadratur erscheinen; die Rechengenauigkeit ist auf jeden Fall größer als die hier angegebene letzte Stelleneinheit. Abrundungen sind bei den Angaben der obigen Tabelle nicht vorgenommen.

Bei allen Verteilungen fällt die lineare bzw. fast lineare Geschwindigkeitsverteilung ins Auge, deren Lage sich nur sehr wenig mit dem κ -Wert ändert, wenn man von der Frontnormierung absieht. Dagegen sind die nicht kinetischen Größen p , ϱ , T in ihrem Verlauf stark von κ abhängig. Mit dem Problem linearer Geschwindigkeitsverteilungen setzt sich v. Hoerner⁸ auseinander. Es läßt sich zeigen, daß nur für $\kappa = 1,4$ die Geschwindigkeitsverteilung hinter einer starken Stoßfront linear sein kann.

Schließlich ist es noch angebracht, sich über den Typus der Lösungen $n \neq n_0$ zu informieren. Bleiben wir innerhalb des Intervalls $0 < n < 1$, so können wir dort zwei Klassen unterscheiden: Lösungen, für die

$$0 < n < n_0$$

⁸ S. v. Hoerner, Z. Naturforsch. **10a**, 687 [1955].

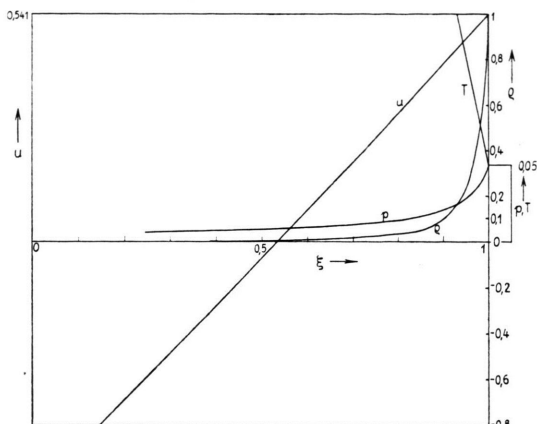


Abb. 4. Die reguläre Strömungsverteilung für $\kappa=1.1$.
($n=n_0$, $k=0.43112 \pm 0.00001$, $t=\text{const.}$)

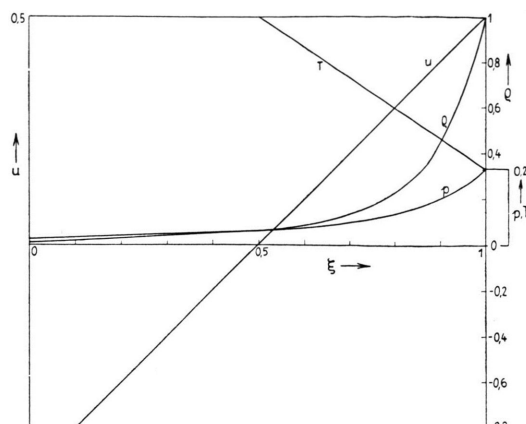


Abb. 5. Die reguläre Strömungsverteilung für $\kappa=1.4$.
($n=n_0$, $k=0.4$, $t=\text{const.}$)

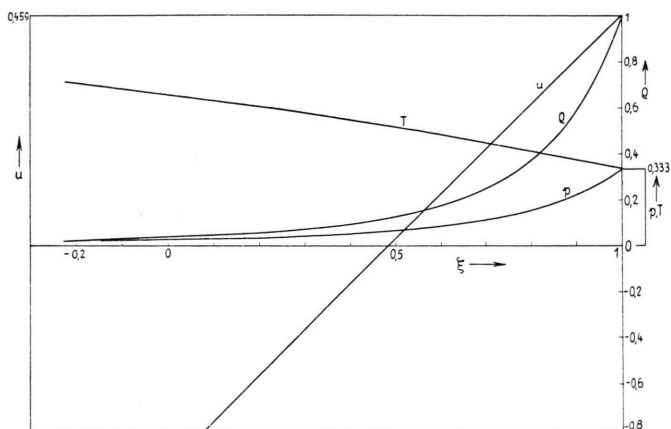


Abb. 6. Die reguläre Strömungsverteilung für $\kappa=5/3$.
($n=n_0$, $k=0.38927 \pm 0.000005$, $t=\text{const.}$)

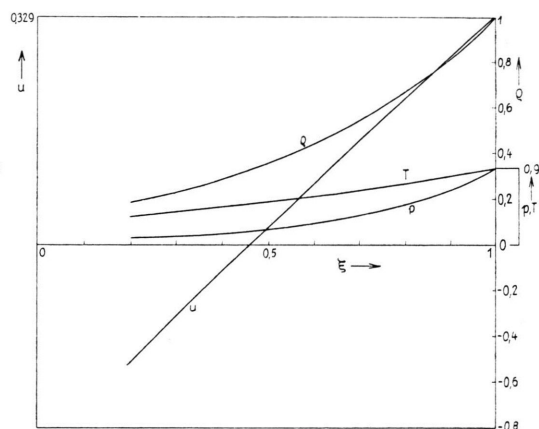


Abb. 7. Die reguläre Strömungsverteilung für $\kappa=2.8$.
($n=n_0$, $k=0.373296 \pm 0.0000001$, $t=\text{const.}$)

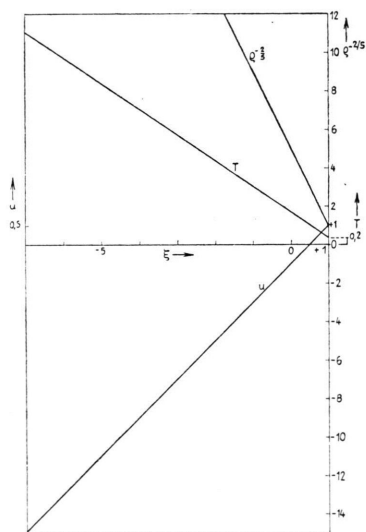


Abb. 8. Die reguläre Strömungsverteilung für $\kappa=1.4$ bis zu großen Werten von ξ .

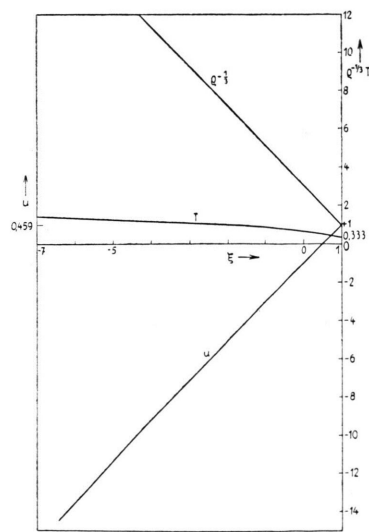


Abb. 9. Die reguläre Strömungsverteilung für $\kappa=5/3$ bis zu großen Werten von ξ .

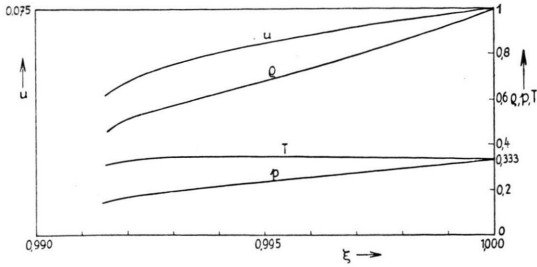


Abb. 10. Die Strömungsverteilung für $n=0,1$ und $\kappa=5/3$ (Einlauf nach P_4 mit Überquerung der Umkehrkanten).

gilt, wollen wir Lösungen der Klasse I nennen; solche, für die

$$n_0 < n < 1$$

gilt, Lösungen der Klasse II.

Lösungen der Klasse I laufen nach P_4 ein, zeigen also Umkehrkanten, Lösungen der Klasse II laufen nach P_6 und zeigen ein starkes Ansteigen der Temperatur für einen festen ξ -Wert. Für $n=0,1$ und $n=0,7$ sind die zugehörigen Verteilungen in den Abb. 10 und 11 angegeben.

Es ist möglich, noch zwei integrale Aussagen zu machen. Der integrale Impuls- bzw. Energiesatz der Hydrodynamik lautet

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_1^2 \rho u dx = - \left\{ p + \rho u \left(u - \frac{dx}{dt} \right) \right\} \Big|_1^2, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_1^2 \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{1}{\kappa-1} p \right) dx \\ &= - \left\{ \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{1}{\kappa-1} p \right) \left(u - \frac{dx}{dt} \right) + p u \right\} \Big|_1^2. \end{aligned} \quad (52)$$

Wählt man die Front als die Berandung 2, so sind die Terme

$$p + \rho u \left(u - \frac{dx}{dt} \right) \Big|_2$$

$$\text{und} \quad \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{1}{\kappa-1} p \right) \left(u - \frac{dx}{dt} \right) + p u \Big|_2$$

wegen der Frontbedingungen (7) – (9) Null. Die Impuls- und Energiebilanz wird allein von der hinteren Berandung 1 und deren Strömungsverhältnissen bestimmt. Über diese wissen wir aber Bescheid, da wir die asymptotische Entwicklung in P_8 kennen, vgl. (41). Setzt man (41) in (51) bzw. (52) ein, so ergibt sich

$$I = 0, \quad (53)$$

$$E \text{ ist unbestimmt und hängt von der Form der hinteren Berandung ab.} \quad (54)$$

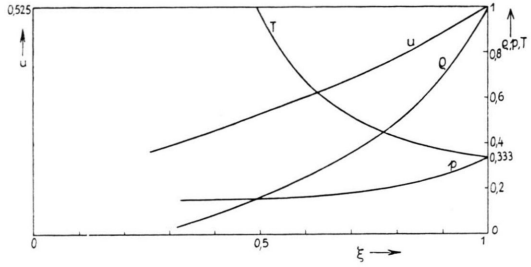


Abb. 11. Die Strömungsverteilung für $n=0,7$ und $\kappa=5/3$ (Einlauf nach P_6).

Wählen wir z.B. als hintere Berandung eine ξ -Linie, so ist $E = \infty$, wählen wir die Lebenslinie des letzten Massenelementes, so ist $E = 0$.

Die Lösung $n=n_0$ hat nun über den Bereich der Homologie-Lösungen hinausgehende Bedeutung. Hain und v. Hoerner stellen in ihrer Arbeit fest, daß eine Verteilung hinter einer langsamer werden den Stoßfront, bei der zu einer festen Zeit $t=t_0$ in gewissen Grenzen beliebige Anfangsverteilungen u , q und p vorgegeben werden, nach relativ kurzer Zeit ein Verhalten zeigen, das sehr gut unserer Lösung $n=n_0$ entspricht. Darin liegt die eigentliche Bedeutung dieser Lösung. In der folgenden Arbeit⁶ soll der Versuch gemacht werden, dieses Verhalten analytisch zu verstehen.

Schließlich ist es noch nützlich und interessant, die singulären Punkte $P_{2,3}$ und P_5 näher zu betrachten.

Zunächst zum Punkt $P_{2,3}$: Wie schon bei Guderley angegeben, stellt dieser Punkt eine $u \pm a$ Charakteristik dar. Als Punkt im (μ, ν) -Diagramm kommt ihm ein fester ξ -Wert zu; die Behauptung, daß der Punkt $P_{2,3}$ eine $u \pm a$ Charakteristik bedeutet, involviert also die Tatsache, daß solche $u \pm a$ -Charakteristik eine Linie $\xi = \text{const}$ sein muß. Es muß also die Gleichung gelten

$$n t^{n-1} \xi = n t^{n-1} \xi (\nu \pm \mu), \quad (55)$$

d. h. aber

$$\mu = (\nu - 1)^2, \quad (56)$$

wenn wir quadrieren, um uns von dem doppelten Vorzeichen frei zu machen. Auf einer $u \pm a$ -Charakteristik gilt die Relation

$$du \pm dp / \rho a = 0. \quad (57)$$

Unter Verwendung des Homologie-Ansatzes und der Relation (56) geht (57) über in

$$\nu = 2/(2 - \kappa). \quad (58)$$

(58) und (56) charakterisierten aber gerade den Punkt $P_{2,3}$, womit die Behauptung über die Charakteristikeigenschaft erwiesen ist.

Nun wird es aber auch klar, warum wir durch den Punkt $P_{2,3}$ mußten, um die reguläre Homologie-Lösung $n=n_0$ zu erhalten: Die $u \pm a$ -Charakteristik des Punktes $P_{2,3}$ – denn um eine solche handelt es sich, wenn wir die Ausgabe von

$P_{2,3}$ wählen, die zu negativem μ gehört — ist die Grenze des Einflußbereiches der Front bzw. auf der Front. Da wir es nämlich mit hyperbolischen Diff.-Gln. zu tun haben, ist der Verlauf der Front innerhalb eines bestimmten Intervalles nur durch das Gebiet, das die $u+a$ - und $u-a$ -Charakteristiken als Grenzen ausschneiden, bestimmt. In Abb. 12 wird das deutlich. Dabei nehmen wir die Verteilung zur Zeit $t=t_1$ als Anfangsverteilung.

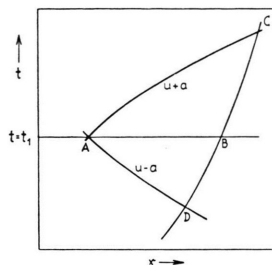


Abb. 12. Der durch die zwei Charakteristiken und den Rand begrenzte Einflußbereich DAC des Randstückes DC.

Die Anfangsverteilung zwischen A und B zur Zeit $t=t_1$ bestimmt die Front von B bis C hinsichtlich ihrer zukünftigen Entwicklung. Bei einer sinnvollen Verteilung ist es aber unmöglich, daß die gesamte Verteilung von $\xi = \xi_F$ bis $\xi = -\infty$ zu einer Zeit $t=t_1$ den weiteren Verlauf der Front bestimmt; das Gas strömt bei großen negativen x -Werten nämlich so stark ab, daß keine $u+a$ -Charakteristik mehr die Front erreicht. Es muß also eine $u+a$ -Charakteristik geben, die zum erstenmal die Front nicht mehr erreicht, wenn die Lösung sinnvoll eine abklingende Stoßwelle darstellen soll. Das ist aber die Charakteristik des Punktes $P_{2,3}$. Vor $P_{2,3}$ ist eine $u+a$ -Charakteristik stärker gekrümmt als eine ξ -Linie, erreicht also noch die Front; danach ist eine $u+a$ -Charakteristik schwächer als eine Parabel $\xi = \text{const}$ gekrümmt, erreicht also die Front keinesfalls, denn die Front ist selbst eine ξ -Linie. Die $u+a$ -Charakteristik, die selbst eine ξ -Linie ist, erreicht die Front zum ersten Male nicht mehr. Weil wir die Existenz einer solchen $u+a$ -Charakteristik sinnvoller Weise verlangen müssen, müssen wir $P_{2,3}$ passieren, und eben das ist die Bedeutung von $P_{2,3}$.

Man kann auch leicht die Bedeutung des Punktes P_5 erkennen. Fragt man nämlich nach allen Homologie-Lösungen, die eine durchgehend lineare Geschwindigkeitsverteilung der Form $u = \text{const} \cdot x/t$ besitzen, so bedingt das wegen (18) ein von ξ unabhängiges v .

Wir haben also zu fordern

$$u = n \xi t^{n-1} v_0; \quad v_0 = \text{const}. \quad (59)$$

Gehen wir damit in die Grundgl. (1) bis (3) ein und verlangen wir, innerhalb des Homologie-Ansatzes (18) bis (21) zu verbleiben, so ergibt sich

$$v_0 = \frac{2}{n(\kappa+1)}, \quad (60)$$

$$u_0^2 = \frac{\kappa v_0 (v_0 - 1/n) (v_0 - 1)}{v_0 - 2}, \quad (61)$$

$$\varrho = \varrho_0 \xi \frac{2}{n(\kappa+1) - 2}. \quad (62)$$

Die Gln. (60) und (61) sind aber die Bestimmungsgleichungen des Punktes P_5 . Der singuläre Punkt P_5 stellt also als Punkt im (μ, v) -Diagramm alle Lösungen dar, bei denen die Geschwindigkeit dem Ansatz $u = \text{const} \cdot x/t$ genügt und die außerdem dem Ansatz (18) bis (21) entsprechen.

Wie leicht zu ersehen, zeigen solche Lösungen eine lineare Verteilung der Schallgeschwindigkeit, dagegen ein Potenzgesetz für ϱ hinsichtlich ξ .

Damit ist die Bedeutung von P_5 geklärt.

Herrn Prof. C. F. v. Weizsäcker danke ich herzlich für die Stellung des Themas, Hilfe und zahlreiche Diskussionen, die häufig auf den Kreis der Herren v. Hagenow, Hain, v. Hoerner und F. Meyer erweitert wurden. Das gleiche gilt für Herrn E. A. Müller aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung.

Herrn Prof. Biermann bin ich für die Möglichkeit, die elektronische Rechenmaschine G1 benutzen zu dürfen, ebenfalls zu großem Dank verpflichtet, denn ohne dieses moderne Hilfsmittel wäre es nur schwer möglich gewesen, das Problem der Integration nichtlinearer Diff.-Gln. anzugehen.